2.2 Β ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΤΗ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΥΠΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Η Διακρίνουσα : Στην εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$, την παράσταση $β^2 - 4αγ$ την ονομάζουμε διακρίνουσα της εξίσωσης και την συμβολίζουμε με το γράμμα Δ.
Δηλαδή $\mathbf{Δ = β^2 - 4αγ}$

2.

Λύσεις της $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$ σε σχέση με την Δ

- Αν $Δ > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες τις
  $x_1 = \dfrac{-β + \sqrt{Δ}}{2α}$ και $x_2 = \dfrac{-β - \sqrt{Δ}}{2α}$
- Αν $Δ = 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες (μία διπλή) τις $x_1 = x_2 = \dfrac{-β}{2α}$
- Αν $Δ < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$

3.

Το τριώνυμο του 2ου βαθμού : Ονομάζουμε τριώνυμο 2ου βαθμού την παράσταση $αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$

4.

Διακρίνουσα και ρίζες του τριώνυμου $αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$

Διακρίνουσα του τριώνυμου $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ και ρίζες αυτού ονομάζουμε την διακρίνουσα και τις ρίζες της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$

5.

Παραγοντοποίηση του τριώνυμου

- Αν το τριώνυμο έχει $Δ > 0$, συνεπώς δύο ρίζες $ρ_1$ και $ρ_2$ άνισες, τότε ισχύει
  $αx^2 + βx + γ = α(x - ρ_1)(x - ρ_2)$
- Αν το τριώνυμο έχει $Δ = 0$, συνεπώς μία διπλή ρίζα ρ, τότε ισχύει
  $αx^2 + βx + γ = α(x - ρ)^2$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Υπολογισμός της διακρίνουσας : Την Δ την υπολογίζουμε με την προϋπόθεση ότι η εξίσωση είναι στην τελική της μορφή.

2.

Οι συντελεστές α , γ ετερόσημοι : Αν α , γ ετερόσημοι , τότε $-\alpha\gamma > 0$ οπότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$ άρα $\Delta > 0$

3.

Ελλιπής εξίσωση : Όταν έχουμε ελλιπή εξίσωση 2ου βαθμού προτιμάμε να την λύσουμε χωρίς τον τύπο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

α) Η εξίσωση $2x^2 + 4 = 0$ έχει $\Delta > 0$ Λ
β) Η εξίσωση $\alpha x^2 + 2x - \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες Λ
γ) Η εξίσωση $\alpha^2x^2 - 2\alpha x + 2 = 0$, $\alpha \neq 0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ Σ
δ) Η εξίσωση $2x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 = 0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ Λ
ε) Η εξίσωση $x^2 - x + 1 = 0$ έχει συντελεστές $\alpha = 1$, $\beta = 1$ και $\gamma = 1$ Λ
στ) Η εξίσωση $x^2 + 2x - 3 = x + 2$ έχει συντελεστές $\alpha = 1$, $\beta = 2$ και $\gamma = -3$ Λ

Προτεινόμενη λύση

α)
$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0^2 - 4{\cdot}2{\cdot}4 = -32 < 0$ Άρα η πρόταση είναι λάθος

β)
Αν $\alpha = 0$ τότε η εξίσωση είναι πρώτου βαθμού και δεν έχει δύο ρίζες.
Άρα η πρόταση είναι λάθος

γ)
$\Delta = 4\alpha^2 - 8\alpha^2 = -4\alpha^2 < 0$ οπότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$
Άρα η πρόταση είναι σωστή

δ)
$\Delta = 9\alpha^2 - 8\alpha^2 = \alpha^2 \geq 0$ άρα η εξίσωση έχει ρίζες , οπότε η πρόταση είναι λάθος

ε)
Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -1$ και $\gamma = 1$, οπότε η πρόταση είναι λάθος

στ)
$x^2 + 2x - 3 = x + 2$ άρα $x^2 + x - 5 = 0$ με $\alpha = 1$, $\beta = 1$ και $\gamma = -5$
Οπότε η πρόταση είναι λάθος

2.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $2x^2-3x+1=0$ **ii)** $x^2-4x+4=0$ **iii)** $2x^2-3x+4=0$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 2

i)

$2x^2-3x+1=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot2\cdot1=9-8=1>0$ άρα $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot2}=\dfrac{3\pm1}{4}$

$x_1=\dfrac{3+1}{4}=1$, $x_2=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$

ii)

$x^2-4x+4=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0$ άρα $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{4\pm\sqrt{0}}{2\cdot1}=\dfrac{4}{2}=2$.

Δηλαδή η εξίσωση έχει δύο ρίζες ίσες $x_1=x_2=2$

iii)

$2x^2-3x+4=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot2\cdot4=9-32=-23<0$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

3.

Να λυθούν οι εξισώσεις.

i) $(2x+3)^2=48+(x-1)^2$ **ii)** $x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0$

iii) $2(x+2)+(x+1)^2=2$ **iv)** $(20x^2-7x-6)(x^2-4x-32)=0$

v) $\sqrt{5}x^2-11x+\sqrt{20}=0$ **vi)** $(x-3)^2+(x+6)^2=1$

θεωρία 2
Σχόλιο 1

Προτεινόμενη λύση

i)

$(2x+3)^2=48+(x-1)^2$ άρα $(2x+3)^2-48-(x-1)^2=0$

$4x^2+12x+9-48-x^2+2x-1=0$

$3x^2+14x-40=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=14^2-4\cdot3\cdot(-40)=196+480=676>0$

Οπότε $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-14\pm\sqrt{676}}{2\cdot3}=\dfrac{-14\pm26}{6}$

Άρα $x_1=\dfrac{-14+26}{6}=2$, $x_2=\dfrac{-14-26}{6}=-\dfrac{20}{3}$

ii)

$x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

$\Delta=(2\sqrt{2})^2-4=8-4=4>0$ οπότε

$x_{1,2}=\dfrac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{4}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}\pm2}{2}$ άρα $x_1=\sqrt{2}+1$, $x_2=\sqrt{2}-1$

iii)

$2(x + 2) + (x + 1)^2 = 2$ άρα $2x+4+x^2+2x+1-2=0$

$x^2 + 4x + 3 = 0$

$\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$ άρα $x_{1,2} = \dfrac{-4\pm 2}{2}$ επομένως $x_1 = -1$ ή $x_2 = -3$

iv)

$(20x^2 - 7x - 6)(x^2 - 4x - 32) = 0$ άρα $20x^2 - 7x - 6 = 0$ ή $x^2 - 4x - 32 = 0$

Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές βρίσκουμε

από την πρώτη $x = \dfrac{3}{4}$ ή $x = -\dfrac{2}{5}$

και από τη δεύτερη $x = -4$ ή $x = 8$

v)

$\sqrt{5}x^2 - 11x + \sqrt{20} = 0$

$\Delta = 121 - 4\sqrt{5}\cdot\sqrt{20} = 121 - 4\sqrt{100} = 81 > 0$

Άρα $x_{1,2} = \dfrac{11\pm 9}{2\sqrt{5}}$ οπότε $x_1 = \dfrac{20}{2\sqrt{5}} = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{5}$ ή $x_2 = \ldots \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

vi)

$(x - 3)^2 + (x + 6)^2 = 1$ άρα $x^2 - 6x + 9 + x^2 + 12x + 36 - 1 = 0$

$2x^2 + 6x + 44 = 0$

$\Delta = 36 - 352 = -316 < 0$ επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

4.

Να λυθούν οι εξισώσεις

i) $5(x^2 - 2x) = 4(x^2 - 1) - 5$

ii) $4x^2 + (x + 2)^2 = 4x(x + 2)$

iii) $(2x - 3)^2 - 1 = (x - 1)(x - 2)$

iv) $5(y^2 - 2y + 1) = y^2 - 1$

v) $(x^2 - 3x)(2y^2 + 4)(3\omega^2 - 5\omega + 2) = 0$

Προτεινόμενη λύση

i)

$5(x^2 - 2x) = 4(x^2 - 1) - 5$ άρα $5x^2 - 10x = 4x^2 - 4 - 5$

$x^2 - 10x + 9 = 0$

$\Delta = 64$ και ρίζες $x_1 = 1$ ή $x_2 = 9$

ii)

$4x^2 + (x + 2)^2 = 4x(x + 2)$ άρα $4x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4x^2 + 8x$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Delta = 0$ και $x_1 = x_2 = 2$

iii)

$(2x - 3)^2 - 1 = (x - 1)(x - 2)$ άρα $4x^2 - 12x + 9 - 1 = x^2 - x - 2x + 2$

$3x^2 - 9x + 6 = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = 1$ και ρίζες $x_1 = 1$ ή $x_2 = 2$

iv)

$5(y^2-2y+1)=y^2-1$ άρα $5y^2-10y+5=y^2-1$

$4y^2-10y+6=0$

$2y^2-5y+3=0$

$\Delta=1$ και ρίζες $y_1=1$ ή $y_2=\dfrac{3}{2}$

v)

$(x^2-3x)(2y^2+4)(3\omega^2-5\omega+2)=0$ άρα

$x^2-3x=0$ ή $2y^2+4=0$ ή $3\omega^2-5\omega+2=0$

$x(x-3)=0$ ή $y^2=-2$ ή $3\omega^2-5\omega+2=0$

- $x(x-3)=0$ άρα $x=0$ ή $x=3$
- $y^2=-2$ που είναι αδύνατη
- $3\omega^2-5\omega+2=0$ με $\Delta=1$ και ρίζες $\omega_1=1$ ή $\omega_2=\dfrac{2}{3}$

5.

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν λύση στο $\mathbb{R}$

i) $\lambda x^2+2x-(\lambda-2)=0$, $\lambda\neq 0$ **ii)** $\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\beta=0$, $\alpha\neq 0$

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 2

i)

$\Delta=4-4\lambda[-(\lambda-2)]=4+4\lambda^2-8\lambda=(2\lambda-2)^2\geq 0$

Άρα η εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{R}$

ii)

$\Delta=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-4\alpha\beta=$

$=\alpha^2+\beta^2-4\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2\geq 0$

Άρα η εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{R}$

6.

Να βρείτε τις τιμές του μ ώστε η εξίσωση $\mu x^2+2x+\mu=0$, $\mu\neq 0$ να έχει διπλή ρίζα

Προτεινόμενη λύση

Θα πρέπει να ισχύει $\Delta=0$ άρα $4-4\mu^2=0$

$\mu^2=1$

$\mu=1$ ή $\mu=-1$

7.

Να γίνει γινόμενο το τριώνυμο $5x^2+3x-8$

Προτεινόμενη λύση

Βρίσκουμε τις ρίζες της εξίσωσης $5x^2+3x-8=0$.

Θεωρία 5

Είναι $\Delta=169$ και $x_1=-\dfrac{8}{5}$ ή $x_2=1$

Άρα $5x^2+3x-8=5\left(x+\dfrac{8}{5}\right)(x-1)=(5x+8)(x-1)$

8.

Να γίνει γινόμενο το τριώνυμο $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta$

Προτεινόμενη λύση

Η εξίσωση $2x^2 + (2\beta - \alpha)x - \alpha\beta = 0$ έχει

$$\begin{aligned}\Delta &= (2\beta-\alpha)^2 - 4\cdot 2(-\alpha\beta) = \\ &= 4\beta^2 - 4\alpha\beta + \alpha^2 + 8\alpha\beta = \\ &= 4\beta^2 + \alpha^2 + 4\alpha\beta = \\ &= (2\beta + \alpha)^2\end{aligned}$$

Και ρίζες $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-(2\beta-\alpha) \pm (2\beta+\alpha)}{4}$

Οπότε $x_1 = \dfrac{-(2\beta-\alpha)+(2\beta+\alpha)}{4} = \dfrac{-2\beta+\alpha+2\beta+\alpha}{4} = \dfrac{\alpha}{2}$

και $x_2 = \dfrac{-(2\beta-\alpha)-(2\beta+\alpha)}{4} = \dfrac{-2\beta+\alpha-2\beta-\alpha}{4} = -\beta$

Επομένως θα έχουμε $2x^2 + (2\beta-\alpha)x - \alpha\beta = 2\left(x - \dfrac{\alpha}{2}\right)(x+\beta) = (2x-\alpha)(x+\beta)$

9.

Να απλοποιηθεί η παράσταση $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-2}$

Προτεινόμενη λύση

Η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχει ρίζες τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$

Άρα $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

Η εξίσωση $2x^2 - 3x - 2 = 0$ έχει ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = -\dfrac{1}{2}$

Άρα $2x^2 - 3x - 2 = 2(x-2)\left(x + \dfrac{1}{2}\right) = (x-2)(2x+1)$

Οπότε το κλάσμα γίνεται $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-2} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(2x+1)} = \dfrac{x-1}{2x+1}$